به نام خدا

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

ریاضی عمومی ۱
پاییز ۹۵-۹۴

فصل چهارم-انتگرال و مشتق

در این کاربرگ ارتباط مشتق و انتگرال را توضیح خواهیم داد. به طور دقیق‌تر، قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال این ارتباط را بیان می‌کند و به کمک آن می‌توانیم مقدار انتگرال بعضی از توابع را به روشی که از محاسبه‌ي مجموع‌های ریمان ساده‌تر است، به دست آوریم. چندین مثال برای روشن شدن موضوع نیز خواهیم آورد. ابتدا قضیه میانگین انتگرال را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱. اگر $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد، نقطه‌ای در بازه $[a,b]$ مانند c وجود دارد که
$$\int_a^b f = (b-a)f(c).$$

فعالیت ۱. قضیه ۱ را اثبات کنید. ابتدا کران بالا و پایینی برای مقدار انتگرال بیابید و سپس از قضیه مقدار بینی برای تابع f استفاده کنید و حکم را نتیجه بگیرید.

قضیه ۲ (قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال - صورت اول)**.** فرض کنید I یک بازه و $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. نقطه‌ای از I مانند a را ثابت در نظر می‌گیریم و تابع $F : I \to \mathbb{R}$ را به صورت
$$F(x) = \int_a^x f$$
تعریف می‌کنیم. در این صورت، F مشتق‌پذیر است و $F' = f$.

فعالیت ۲. قضیه ۲ را اثبات کنید. ابتدا تعریف مشتق را بنویسید، سپس از قضیه ۱ استفاده کنید و حکم را نتیجه بگیرید.

تعریف ۳. هر تابع را که مشتقش تابع داده شده f باشد تابع اولیه‌ای برای f یا انتگرال نامعین f می‌نامیم. به طور مثال طبق قضیه ۱، هر تابع پیوسته تابع اولیه دارد.

فعالیت ۳.

الف) نشان دهید اگر F و G دو تابع اولیه برای تابع پیوسته f روی بازه باز I باشند، آنگاه $F-G$ تابعی ثابت است.

ب) با استفاده از صورت اول قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال، نتیجه زیر را اثبات کنید.

نتیجه ۴. فرض کنید I یک بازه، $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و $\phi : I \to \mathbb{R}$ تابع اولیه‌ای برای f باشد، در این صورت، به ازای هر دو نقطه از I مانند a و b،
$$\int_a^b f = \phi(b) - \phi(a).$$

فعالیت ۴.

الف) فرض کنید a عددی گویا و نامنفی باشد. تابع $f(x) = x^a$ به ازای هر $x \geq 0$ تعریف‌شده و پیوسته است. تابع اولیه‌ای برای f بدست آورید.

ب) تابع $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ را در نظر بگیرید. این تابع روی $\mathbb{R}$ تعریف‌شده و پیوسته است. تابع اولیه‌ای برای آن بیابید.

ج) تابع $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ را با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x^2}$ در نظر بگیرید. همه توابع اولیه تابع f را بدست آورید.

قضیه ۵ (قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال - صورت دوم). فرض کنید I بازه باشد و $F : I \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر که مشتق آن، F'، روی بازه $[a, b]$ از I انتگرال‌پذیر است. در این صورت

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

فعالیت ۵. قضیه ۵ را اثبات کنید. مجموع ریمانی برای F' بنویسید که به اندازه ε نزدیک $\int_a^b F'$ باشد. حال از قضیه مقدار میانگین مشتق استفاده کنید و حکم را نتیجه بگیرید.

نمادگذاری. انتگرال تابع f روی بازه $[a, b]$ را به صورت $\int_a^b f(x)dx$ نیز نمایش می‌دهند. این نماد بدین معنی است که نقاط بازه $[a, b]$ با متغیر x نمایش داده شده‌اند؛ به طور کلی، $\int_a^b f(\cdots)d*$ یعنی اینکه نقاط بازه $[a, b]$ با $*$ مشخص شده‌اند. به طور مثال وقتی می‌نویسیم

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin^2(x) + x)dx$$

منظور انتگرال تابعی است که به ازای هر مقدار x در بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$، مقدار $\cos(\sin^2(x) + x)$ را می‌گیرد.

لگاریتم

می‌دانیم یک تابع اولیه برای تابع x^{-a} وقتی a طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ باشد، $\frac{1}{-a+1}x^{-a+1}$ است. برای $a=1$، تابع x^{-1} روی بازه $]0, +\infty[$ پیوسته است و بنابر قضیه ۱، تابع اولیه دارد. در این بخش خواص ابتدایی تابع اولیه x^{-1} را بررسی می‌کنیم. چنین تابعی را لگاریتم طبیعی می‌نامیم که به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R},$$
$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

فعالیت ۶.

الف) ثابت کنید تابع $\ln(x)$ صعودی اکید است و نمودار آن را رسم کنید.

ب) برای $a, b > 0$، نشان دهید که $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$.

ج) برای $a, b > 0$، نشان دهید که $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$.

د) برای $a > 0$، نشان دهید به ازای هر عدد گویا مانند r، $\ln(a^r) = r\ln(a)$.

ه) نشان دهید عددی یکتا، که آن را e می‌نامیم، وجود دارد که $\ln e = 1$. عدد e در نابرابری‌های $2 < e < 3$ صدق می‌کند.

و) نشان دهید به ازای هر عدد گویا و مثبت مانند r، $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$.

ز) نشان دهید به ازای هر عدد گویا و مثبت مانند r، $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^r \ln x) = 0$.

ح) همه توابع اولیه $\frac{1}{x}$ را بدست آورید.